(مقالهٔ پژوهشی)

روشی نوین جهت بهبود قابلیّت ردیابی ترک در چرخ‌دنده‌های مارپیچ*

محسن رضایی[۱]   شهرام هادیان جزی[۲]   مهرداد پورسینا[۳]   فرهاد حاجی ابوطالبی[۴]

چکیده *سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای مارپیچ نسبت به چرخ‌دنده‌های ساده از دقّت، عمر و کاربرد بیشتر و لرزش، سروصدا و خطای انتقال کمتری بهره می‌برند. یکی از مواردی که می‌تواند در کارکرد این سیستم‌ها خلل ایجاد کند، وجود ترک در ریشهٔ دندانه چرخ‌دنده است. به همین دلیل شناسایی ترک ریشهٔ دندانه در مراحل اولیه پیدایش و رشد آن، بسیار حائز اهمّیّت است. یکی از روش‌های متداول برای استخراج اثر ترک‌ها از سیگنال ارتعاشی، استفاده از روش سیگنال باقیمانده است. ازآنجاکه محاسبه سیگنال باقیمانده مستلزم دانستن سیگنال ارتعاشی حالت سالم و یا پارامترهای اولیه و شرایط کاری سیستم مورد بررسی است، ارائه راه‌کاری جهت برجسته نمودن اثر ترک روی سیگنال ارتعاشی بدون نیاز به اطّلاعات دیگر می‌تواند بسیار مفید واقع شود. در این پژوهش، ابتدا روش محاسبه سفتی درگیری چرخ‌دنده‌های مارپیچ و اثر ترک دندانهٔ روی آن بررسی شده و سپس یک سیستم کامل چرخ‌دنده‌ای مارپیچ تک‌مرحله‌ای شامل موتور و بار، مدل‌سازی و به‌صورت عددی حل شده تا سیگنال ارتعاشی سیستم حاصل گردد. سپس تأثیر این روش بر سیگنال ارتعاشی به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی دینامیکی یک سیستم با یک ترک کوچک ارائه می‌گردد. نهایتاً روش پیشنهادشده روی سیگنال ارتعاشی سیستم ارائه شده در یکی از تحقیقات پیشین، اعمال شده و کارایی آن نشان داده می‌شود.*

واژه‌های کلیدی چرخ‌دنده مارپیچ؛ ردیابی ترک؛ خطای انتقال؛ پردازش سیگنال

A Novel Method to Improve Crack Detection Ability in Helical Gear

M. Rezaei   Sh. Hadian Jazi   M. Poursina   F. Haji Aboutalebi

Abstract *The helical gear systems have some distinctions such as more precision, long life and more applications in the industry, and less vibration, noise and transmission error compared to spur gear systems. One of the damages that can affect the operation of these systems is the gear tooth root crack. So, the crack detection in its early stages of growth and development is very important. The residual signal method is one of the common methods to extract the effect of crack from the system vibration signal. Since the residual signal calculation requires the information of the vibration response of the healthy state or the system initial parameters, providing a method to extract the effect of crack from the vibrating response without any more information is very helpful. In this research, at first the calculation of the helical gear pair mesh stiffness is explained, and the effect of tooth root crack is also described. Then, a single-stage helical gear system, with the motor and the load, is modeled and solved numerically to achieve the system dynamic response. Then, the effect of present method on the vibration signal obtained from the dynamic simulation of a system with a small crack is Shown and discussed. Finally, the proposed method is applied to the dynamic response signal of a system that presented in one of the previous researches, and its efficiency is illustrated.*

Key Words Helical Gear; Crack Detection; Transmission Error; Signal Processing.

★تاریخ دریافت مقاله ۹۷/۱۰/۱۳ و تاریخ پذیرش آن ۹۸/۹/٤ می‌باشد. **DOI:** 10.22067/fum-mech.v31i1.78275

(۱) دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

(۲) نویسندهٔ مسئول: استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران، s.hadian@eng.ui.ac.ir

(۳) دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

(٤) استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

مقدّمه

سیستم‌های انتقال قدرت در صنعت ازنظر کارایی، دقّت و عمر مورد بررسی و گزینش قرار می‌گیرند. ازجمله سیستم‌های انتقال قدرتی که نسبت به دیگر سیستم‌ها دارای نسبت ظرفیت باربری به وزن بالاتر، راندمان انتقال بیشتر، سروصدا و ارتعاش کمتر و عمر بیشتر است، می‌توان به سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای اشاره نمود. در این میان سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای مارپیچ از دقّت، عمر و کاربرد بیشتر و لرزش، سروصدا و خطای انتقال کمتری نسبت به دیگر سیستم‌ها بهره می‌برند. یکی از مواردی که باعث ایجاد خلل در کارکرد این سیستم‌ها می‌شود، وجود ترک در دندانهٔ چرخ‌دنده است که عموماً در ریشهٔ دندانه‌ها اتفاق می‌افتد. ازاین‌رو شناسایی و ردیابی ترک دندانه در آغاز پیدایش و رشد اولیه آن، بسیار حائز اهمّیّت بوده و همچنین یکی از حوزه‌های مورد علاقه و مطالعه پژوهشگران است. پژوهش‌ها در این زمینه به سه بخش محاسبه سفتی درگیری چرخ‌دنده‌های ترک‌دار، مدل‌سازی دینامیکی سیستم چرخ‌دنده‌ای و پردازش سیگنال ارتعاشی تقسیم‌بندی می‌شوند.

محمد و همکارانش [1] به محاسبه سفتی درگیری چرخ‌دنده ساده ترک‌دار با هدف تحلیل عیوب چرخ‌دنده بر اساس ارتعاشات آن پرداختند. ایشان به روش اجزاء محدود و روش‌های تحلیلی مختلفی سفتی درگیری چرخ‌دنده‌های ساده را محاسبه کردند. اختلاف دو روش تحلیلی آنها در تعیین ناحیه مرده حاصل از ترک بود. آنها برای تعیین ناحیه مرده، به ترتیب از یک خط راست قائم و یک منحنی سهمی‌وار استفاده نموده و با استفاده از روش اجزاء محدود نشان دادند، زمانی که طول ترک نسبت به ضخامت دندانه زیاد می‌شود، تعیین ناحیه مرده بر اساس منحنی سهمی‌وار مناسب‌تر از خط راست خواهد بود.

لی و همکارش [2] دینامیک یک سیستم چرخ‌دنده‌ای ساده با یک مدل جرم متمرکز چهار درجهٔ آزادی را بررسی کرده و سیگنال ارتعاشی آن را به دست آوردند. درجات آزادی مدل آنها به ترتیب جابجایی پیچشی موتور، چرخ‌دنده راننده، چرخ‌دنده رانده‌شده و مصرف‌کننده است. آنها با استفاده از بسط فوریه سفتی درگیری چرخ‌دنده‌ها، به حل رابطهٔ دینامیکی پرداختند.

وان و همکارانش [3] سفتی درگیری یک جفت چرخ‌دنده مارپیچ را به روش تحلیلی محاسبه کردند. آنها یک دندانهٔ مارپیچ را با چندین دندانهٔ ساده با ضخامت کم که پشت سر هم قرار گرفته‌اند، جایگزین کردند. قرارگیری هر دندانهٔ ساده در راستای ضخامت چرخ‌دنده، نسبت به دندانهٔ قبلی وابسته به زاویهٔ مارپیچ دندانهٔ اصلی خواهد بود. آنها نتایج مدل خود را با یک مدل اجزاء محدود مقایسه کرده و نشان دادند این روش از دقّت کافی برخوردار است. سپس به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف ازجمله مدول چرخ‌دنده، زاویهٔ مارپیچ، ضخامت چرخ‌دنده و ترک در ریشهٔ دندانه پرداختند. آنها همچنین دینامیک یک جفت چرخ‌دنده مارپیچ را با یک مدل جرم متمرکز شش درجهٔ آزادی بررسی کردند. درجات آزادی مدل آنها شامل دو درجهٔ آزادی عرضی و یک درجهٔ آزادی چرخشی برای هر چرخ‌دنده بود. آنها سیگنال ارتعاشی سیستم مورد نظر خود را به دست آورده و شتاب حرکت پینیون در راستای عرضی را برای مقادیر مختلف زاویهٔ مارپیچ نشان دادند.

برای بهبود استخراج عیوب پنهان در چرخ‌دنده‌ها روش‌های مختلفی بر اساس میانگین‌گیری هم‌زمان برای تحلیل سیگنال حاصل از این سیستم‌ها توسعه داده شده‌اند. در این میان دو روش پرکاربرد روش تفکیک دامنه‌ای و فازی (Amplitude and Phase Demodulation) و روش سیگنال باقیمانده (Residual Signal Method) هستند. مک‌فادن [4] پیشنهاد داد که برای شناسایی ترک دندانهٔ چرخ‌دنده از تفکیک فازی به‌جای تفکیک دامنه‌ای استفاده شود. در روش سیگنال

باقیمانده برای اینکه سیگنال تولید شده بر اثر عیب مورد نظر بهتر و واضح‌تر شناسایی شود، سیگنال منظم حاصل از فرکانس درگیری چرخ‌دنده را حذف کرده و تحلیل روی سیگنال باقیمانده انجام می‌شود. روش‌های مختلفی برای تولید سیگنال باقیمانده وجود دارد. اوّلین روش توسط استوارت [5] با توسعه شاخص‌های شناسایی عیوب ارائه شد. یکی از ابزارهای قدرتمندی که او ارائه داد شاخص کشیدگی سیگنال باقیمانده بود که به FM4 معروف است. راندال [6] نیز از روش حذف هارمونیک‌های درگیری چرخ‌دنده از سیگنال اصلی به محاسبه سیگنال باقیمانده در حوزه زمان بهره برد. یک روش جدید پالایش بر اساس مدل خودبرگشت‌کننده (Model Autoregressive) بعدها توسط وانگ و وونگ [7] توسعه یافت. محققان دیگر در مراجع [8-11] نشان دادند که روش مدل خودبرگشت‌کننده از مدل قدیمی استوارت زودتر و با بازدهی بالاتر عیوب را شناسایی می‌کند.

وو و همکارانش [12] از دو روش برای محاسبه سیگنال باقیمانده استفاده کردند. آنها در روش اول با حذف فرکانس‌های درگیری و فرکانس محور و هارمونیک‌های آنها از سیگنال اصلی، سیگنال باقیمانده را به دست آوردند. در روش دوم آنها سیگنال سیستم سالم را از سیگنال سیستم معیوب کم کرده و به سیگنال باقیمانده دست یافتند. سان و همکارانش [13] و بازونی و همکارانش [14] از سیگنال باقیمانده در تحقیقات خود به‌عنوان یک روش عیب‌یابی استفاده کرده‌اند. نهایتاً ماهگون [15] یک روش محاسبه سیگنال باقیمانده بر اساس تجزیه جمعی تجربی (Ensemble Decomposition Empirical Mode) ارائه داد. با استفاده از این روش سیگنال باقیمانده با حذف توابع مود طبیعی (Intrinsic Mode Functions) که هارمونیک‌های فرکانس درگیری و دیگر اجزای سیگنال‌های منظم را دربرمی‌گیرند، به دست می‌آید.

ازآنجاکه محاسبه سیگنال باقیمانده مستلزم دانستن سیگنال ارتعاشی حالت سالم و یا پارامترها و شرایط سیستم مورد بررسی است، ارائه راه‌کاری جهت برجسته نمودن تأثیر ترک دندانهٔ روی سیگنال ارتعاشی؛ بدون نیاز به دانستن اطّلاعات اضافی؛ می‌تواند در شناسایی محل ترک در سیگنال ارتعاشی بسیار مفید واقع شود. در این تحقیق این مهم محقق گشته و روشی جدید برای برجسته‌سازی اثرات عیوب محلی ارائه می‌گردد. بدین منظور، در این مقاله ابتدا روش محاسبه سفتی درگیری چرخ‌دنده‌های مارپیچ و اثر ترک دندانهٔ روی آن بررسی شده و سپس یک سیستم کامل چرخ‌دنده‌ای مارپیچ تک‌مرحله‌ای شامل موتور و بار، مدل‌سازی و به‌صورت عددی حل شده تا سیگنال ارتعاشی سیستم حاصل گردد. سپس روش پیشنهادشده روی سیگنال ارتعاشی حاصل از شبیه‌سازی دینامیکی سیستم چرخ‌دنده مارپیچ اعمال شده و کارایی آن بررسی می‌گردد. نهایتاً روش پیشنهادشده روی سیگنال ارتعاشی یک سیستم دیگر که در تحقیقات پیشین ارائه شده است، اعمال شده و قابلیّت آن نشان داده می‌شود.

محاسبه سفتی درگیری به روش تحلیلی

اوّلین مرحله از مراحل بررسی یک سیستم چرخ‌دنده‌ای تعیین سفتی درگیری دو چرخ‌دنده درگیر است. در این بخش برای روشن‌تر شدن موضوع ابتدا یک تعریف اجمالی از عنوان سفتی درگیری ارائه می‌شود. وقتی دو دندانه از دو چرخ‌دنده درگیر با یکدیگر تماس پیدا می‌کنند، بر اثر نیرویی که به یکدیگر وارد می‌کنند و رفتار الاستیک آنها، چرخ‌دنده‌ها دچار کرنش می‌شوند. نسبت نیروی اعمالی بین دو دندانه و جابجایی در راستای اعمال این نیرو را سفتی درگیری دو چرخ‌دنده می‌نامند. لازم به توضیح است که سفتی درگیری دو چرخ‌دنده از زمان دیدار تا زمان وداع دو دندانه متغیر است. سفتی درگیری دو چرخ‌دنده را با استفاده از

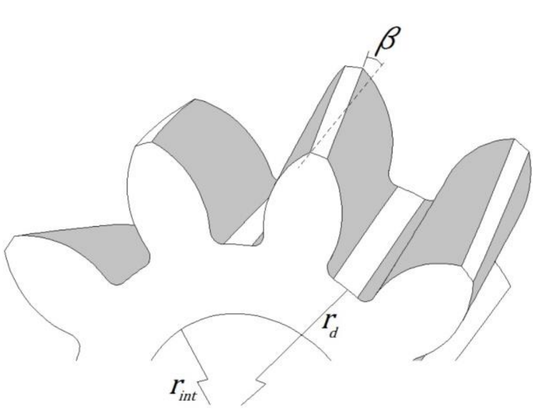
روش‌های مختلفی مانند روش تحلیلی، اجزاء محدود و آزمون تجربی می‌توان محاسبه کرد. در این پژوهش روش تحلیلی برای محاسبه سفتی درگیری مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای محاسبه سفتی درگیری دو چرخ‌دنده به روش تحلیلی ابتدا به این مطلب اشاره می‌شود که سفتی درگیری دو چرخ‌دنده از برهم‌نهی سفتی جفت دندانه‌های درگیر در هر لحظه حاصل می‌شود. به این منظور، ابتدا سفتی یک جفت دندانهٔ درگیر مورد بررسی قرار گرفته و سپس با استفاده از نسبت تماس دو چرخ‌دنده سفتی درگیری کل حاصل می‌شود. سفتی یک جفت دندانه شامل چند جزء است. هر دندانه به‌تنهایی شامل سفتی پایه دندانه، سفتی محوری فشاری، سفتی برشی و سفتی خمشی است. همچنین دو دندانه در نقطه تماس دارای یک سفتی تماسی خواهند بود. برای سفتی درگیری دو چرخ‌دنده ساده از رابطهٔ (۱) استفاده می‌شود [16]:

$$K_e=\sum_{i=1}^{2}K_e^i$$
$$\frac{1}{K_e^i}=\frac{1}{K_{ap}^i}+\frac{1}{K_{bp}^i}+\frac{1}{K_{sp}^i}+\frac{1}{K_{fp}^i}+\frac{1}{K_h^i}+\frac{1}{K_{ag}^i}+\frac{1}{K_{bg}^i}+\frac{1}{K_{sg}^i}+\frac{1}{K_{fg}^i} \quad (۱)$$

زیرنویس‌های a، b، s، f و h به ترتیب بیان‌کنندهٔ سفتی محوری، خمشی، برشی، پایه و تماسی، و p و g به ترتیب مربوط به پینیون و چرخ‌دنده هستند. بالانویس i نیز مربوط به شماره جفت دندانه درگیر است که می‌تواند مقدار یک یا دو داشته باشد.

ازآنجاکه چرخ‌دنده‌های ساده به‌طور ناگهانی وارد درگیری شده و به‌طور ناگهانی از آن خارج می‌شوند، تغییرات ناگهانی شدیدی در سفتی درگیری آنها مشاهده شده و نهایتاً منجر به تولید ارتعاش و سروصدای بیشتر در این سیستم‌ها می‌شود. چرخ‌دنده‌های مارپیچ بر خلاف چرخ‌دنده‌های ساده، به علت وجود زاویهٔ مارپیچ در دندانه‌های خود، کاملاً آرام و یکنواخت وارد درگیری شده و به همین ترتیب خارج می‌شوند. سطح تماس یک دندانه مارپیچ در لحظه ابتدای درگیری یک نقطه بوده و سپس تبدیل به خط می‌شود. طول این خط رفته‌رفته با درگیر شدن کامل دندانه به بزرگ‌ترین مقدار خود می‌رسد، سپس در انتهای درگیری نیز طول خط تماس رو به کاهش گذاشته و در آخرین لحظه خروج از درگیری تبدیل به نقطه می‌گردد. این خاصیت چرخ‌دنده‌های مارپیچ باعث می‌شود تغییرات سفتی درگیری آنها نیز بسیار آرام و یکنواخت باشد که تولید ارتعاش و سروصدای کمتر سیستم را در پی دارد [3]. برشی از یک چرخ‌دنده مارپیچ در حالت سه‌بعدی در شکل (۱) نشان داده شده است.

واضح است که به دلیل وجود زاویهٔ مارپیچ، سفتی درگیری چرخ‌دنده‌های مارپیچ را نمی‌توان مشابه چرخ‌دنده‌های ساده محاسبه کرد، اما می‌توان از آن روش به‌گونه‌ای دیگر بهره برد. در این روش یک دندانهٔ مارپیچ به قطعات کوچک‌تری تقسیم شده که آنها را می‌توان با تقریب مناسب، یک دندانهٔ ساده با پهنای نازک فرض کرد [3]. لحظه شروع درگیری هر دو قطعه مجاور دارای یک فاصله زاویه‌ای است که به تعداد قطعات و زاویهٔ مارپیچ دندانهٔ اصلی بستگی دارد.



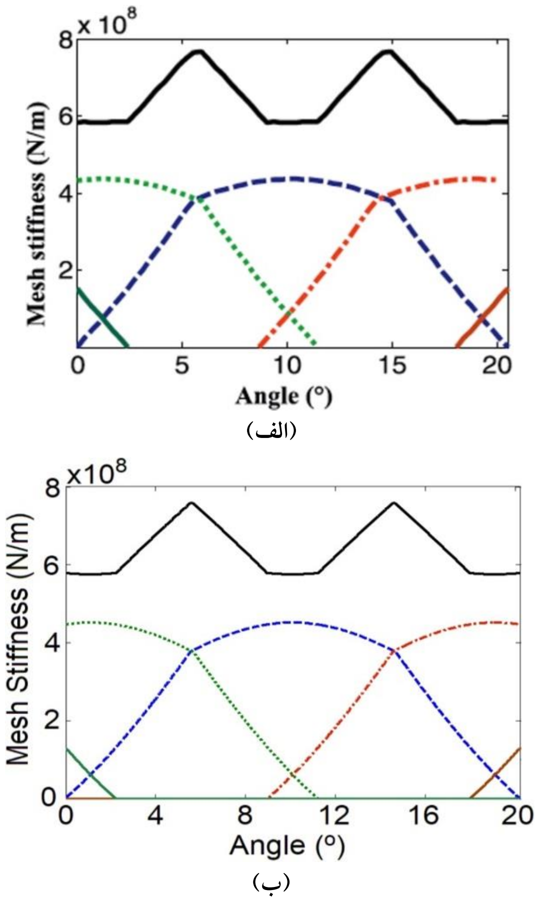
شکل «۱»: برشی از یک مدل سه‌بعدی چرخ‌دنده مارپیچ

چنانکه مشخص است، سفتی درگیری دندانهٔ مارپیچ اصلی می‌تواند از برهم‌نهی سفتی درگیری قطعات ساده با در نظر گرفتن فاصله زاویه‌ای آنها به دست آید. برای صحت‌سنجی این روش از نتایج تحقیق وان و همکارانش [3] که آنها نیز نتایج خود را با یک مدل اجزاء محدود صحت‌سنجی کرده‌اند، بهره برده می‌شود. در جدول (۱) مشخصات چرخ‌دنده‌های مورد استفاده در مرجع [3] نشان داده شده است. در این حالت نیز پس از محاسبه سفتی درگیری هر جفت دندانهٔ مارپیچ، با استفاده از نسبت تماس چرخ‌دنده‌ها نمودارهای به‌دست‌آمده با فاصله‌های مشخص روی‌هم قرار داده می‌شوند تا نمودار سفتی درگیری کلی دو چرخ‌دنده به دست آید.

جدول «۱»: مشخصّات چرخ‌دنده‌های مورد استفاده در مرجع [3]

مشخصّه	مقدار
مدول عمودی (میلی‌متر)	٤
زاویهٔ فشار عمودی (درجه)	٢٠
زاویهٔ مارپیچ (درجه)	١٥
مدول الاستیسیته (گیگاپاسکال)	٢٠٦
نسبت پواسون	٠/٣
عرض دندانه (میلی‌متر)	٣٠
تعداد دندانه‌ها	٤٠

نتایج به‌دست‌آمده در مرجع [3] و این پژوهش در شکل (۲) نشان داده شده‌اند. چنانکه در هر دو نمودار قابل مشاهده است، خط‌چین آبی‌رنگ نشان دهنده سفتی جفت دندانهٔ حاضر، نقطه‌چین سبزرنگ نشان دهنده سفتی جفت دندانهٔ قبلی و خط-نقطه قرمزرنگ مربوط به جفت دندانهٔ بعدی می‌باشند. از برهم‌نهی مقادیر سفتی‌هایی که در هر لحظه وجود دارند، سفتی درگیری کل به دست می‌آید که در نمودار با خط ممتد مشکی نمایش داده شده است. روند تغییرات این نمودارها کاملاً با یکدیگر همخوانی دارد. بیشترین اختلاف دو نمودار در نقاط بیشینهٔ آنها (در نقاط ۵ و ۱۵ درجهٔ محور افقی) اتفاق افتاده است. میزان اختلاف نسبت به مقدار محاسبه شده در مرجع [3] ۱/۳۲ درصد محاسبه شده است.



شکل «۲»: نتایج سفتی درگیری چرخ‌دنده مارپیچ الف) به‌دست‌آمده در مرجع [3] ب) به‌دست‌آمده در این تحقیق

مدل‌سازی ترک در ریشهٔ دندانه

مدل‌سازی ترک ریشهٔ دندانه در معادلات حاکم بر دینامیک چرخ‌دنده‌ها در بخش محاسبه سفتی درگیری انجام می‌پذیرد. به‌گونه‌ای که برای مدل کردن اثر ترک، ناحیه‌ای از سطح دندانه را به‌عنوان ناحیه مرده تلقی کرده و در محاسبه سفتی‌های مختلف دندانه، آن ناحیه را لحاظ نمی‌کنند. روش‌های مختلفی نیز برای تعیین ناحیه مرده استفاده می‌شود. یکی از این روش‌ها بدین‌صورت است که از نوک ترک یک خط قائم

ترسیم شده و سطح بالای ترک ناحیه مرده فرض می‌شود. تنها متغیرهایی که در این روش تغییر می‌کنند، سطح مقطع و گشتاور سطح مقطع دندانه هستند که به‌صورت رابطه‌های (۲ و ۳) تغییر می‌کنند [17]:

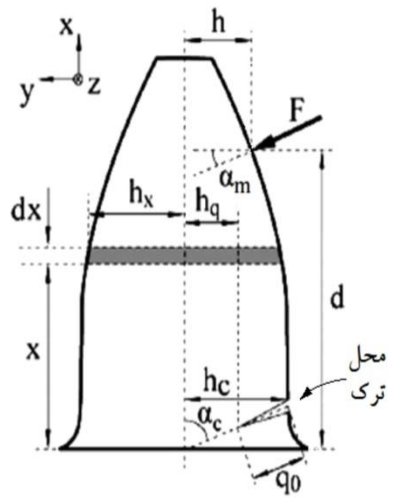
$$A_x = \begin{cases} (h_x + h_x)L & h_x \le h_q \\ (h_x + h_q)L & h_x > h_q \end{cases} \quad (۲)$$

$$I_x = \begin{cases} \frac{1}{12}(h_x + h_x)^3 L & h_x \le h_q \\ \frac{1}{12}(h_x + h_q)^3 L & h_x > h_q \end{cases} \quad (۳)$$

در رابطه‌های فوق h_q طول باقیمانده از نصف ضخامت دندانه در نیمه معیوب آن است که در شکل (۳) نشان داده شده و از رابطهٔ (٤) به دست می‌آید [17]:

$$h_q = h_c - q_0 \cos(\alpha_c) \quad (٤)$$

h_c نصف ضخامت دندانه در ناحیه ترک، q_0 طول ترک و α_c زاویهٔ راستای ترک با خط مرکزی دندانه است که در شکل (۳) نشان داده شده‌اند.



شکل «۳»: مشخصه‌های مورد نیاز محاسبه سفتی دندانهٔ ترک‌دار

برای صحت‌سنجی روابط ذکر شده و برنامه‌های رایانه‌ای توسعه‌یافته در نرم‌افزار متلب از نتایج تحقیق محمد و همکارانش [18] استفاده می‌شود. مقادیر پارامترهای چرخ‌دنده‌ها و اندازهٔ ترک استفاده شده در این تحقیق در جدول‌های (۲ و ۳) ذکر شده است. درصد طول ترک بیان شده در جدول (۳) در واقع درصد طول ترک نسبت به نصف ضخامت دندانه در محل ترک است. برای رسم نمودار سفتی درگیری یک جفت چرخ‌دنده که یکی از آنها دارای یک دندانهٔ ترک‌دار است به‌صورت زیر عمل می‌شود. ابتدا نمودار سفتی درگیری یک جفت دندانهٔ سالم و یک جفت دندانه که یکی از آنها دارای ترک است به دست آورده می‌شوند. سپس نمودار نهایی از برهم‌نهی این نمودارها به دست می‌آید. به این صورت که فرض می‌شود در لحظه اولیه که جفت دندانهٔ معیوب وارد درگیری می‌شوند، یک جفت دندانهٔ سالم درون درگیری بوده و سپس در ادامه از درگیری خارج می‌شوند. پس از مدتی یک جفت دندانهٔ سالم دیگر وارد درگیری شده و تا انتهای نمودار که درگیری جفت دندانهٔ معیوب به پایان می‌رسد، در درگیری می‌مانند. این فاصله‌های زمانی ورود و خروج از درگیری جفت دندانه‌های مختلف به نسبت تماس چرخ‌دنده‌ها بستگی دارد.

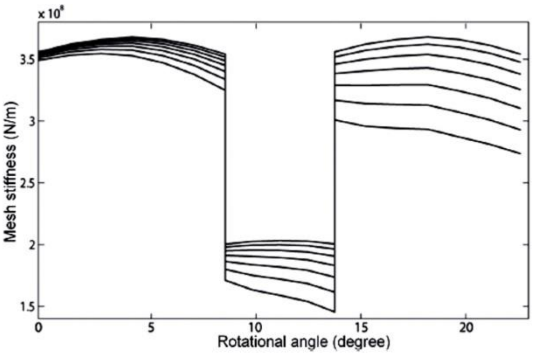
جدول «۲»: مشخصّات چرخ‌دنده و پینیون [18]

مشخصّه	پینیون	چرخ‌دنده
تعداد دندانه	۲۵	۳۰
مدول (میلی‌متر)	۲	۲
عرض دندانه (میلی‌متر)	۲۰	۲۰
نسبت تماس	۱/٦۳	۱/٦۳
زاویهٔ فشار (درجه)	۲۰	۲۰
مدول الاستیسیته (گیگاپاسکال)	۲۰۰	۲۰۰
نسبت پواسون	۰/۳	۰/۳

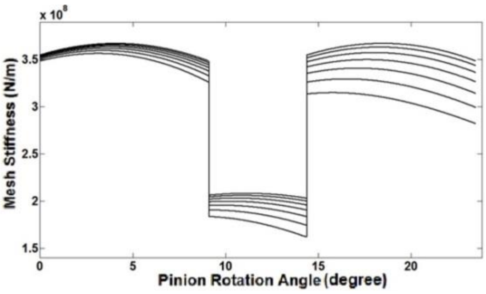
جدول «۳»: مشخصات ترک ریشهٔ دندانه [18]

مورد	طول ترک (میلی‌متر)	درصد طول ترک	زاویهٔ ترک
۱	۰	۰	۷۰ درجه
۲	۰/۳	۸/۰٦	
۳	۰/٦	۱٦/۱۲	
٤	۰/۹	۲٤/۱۹	
۵	۱/۲	۳۲/۲۵	
٦	۱/۵	٤۰/۳۲	
۷	۱/۸	٤۸/۳۸	

در شکل (٤) نمودار سفتی درگیری برای مشخصات چرخ‌دنده ذکر شده در جدول (۲) و مقادیر مختلف اندازهٔ ترک ذکر شده در جدول (۳) در قسمت (الف) رسم شده توسط محمد و همکارانش [18] و در قسمت (ب) به‌دست‌آمده از برنامه‌های رایانه‌ای توسعه یافته در پژوهش حاضر که در محیط نرم‌افزار متلب نگاشته شده‌اند، ارائه شده‌اند. مقادیر مختلف اندازهٔ ترک در جدول (۳) به‌صورت درصد طول ترک آمده است که بر حسب نسبت طول ترک به ضخامت دندانه در ریشه محاسبه می‌شود. مشاهده می‌شود که روند تغییرات نمودارها کاملاً مشابه هستند. بیشترین اختلاف در بیشترین مقدار اندازهٔ ترک (۱/۸ میلی‌متر) و در انتهای نمودار اتفاق افتاده است که میزان اختلاف پاسخ به‌دست‌آمده در این تحقیق نسبت به تحقیق مرجع [18] ۱/۸۲ درصد بوده است.



(الف)

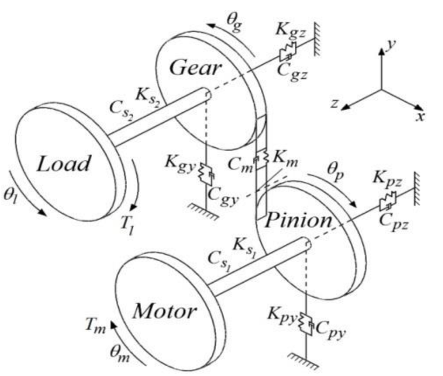


(ب)

شکل «٤»: نمودار سفتی درگیری برای مقادیر مختلف ترک الف) رسم شده در مرجع [18] ب) به‌دست‌آمده در این تحقیق

مدل‌سازی دینامیکی سیستم چرخ‌دنده مارپیچ

برای مدل‌سازی سیستم چرخ‌دنده‌ای مارپیچ تک‌مرحله‌ای از مدل جرم متمرکز (Lumped Mass Model) استفاده می‌شود. در این نوع مدل، سیستم به‌صورت اجزایی با جرم‌های متمرکز که با فنر و دمپر به هم متصل هستند مدل‌سازی می‌شود. سفتی فنرها مربوط به سفتی اجزای سیستم مانند یاتاقان‌ها، محورها و سفتی درگیری چرخ‌دنده‌ها است. برای این منظور، یک مدل هشت درجهٔ آزادی سیستم چرخ‌دنده‌ای مارپیچ با موتور و بار چنانکه در شکل (۵) نشان داده شده است، در نظر گرفته شده است. همچنین معادلات دیفرانسیل حاکم بر دینامیک این سیستم مطابق معادلات (۱۲-۵) به‌دست‌آمده‌اند. با یک روانکاری خوب بین دندانه‌های چرخ‌دنده‌های درگیر، نیروی اصطکاکی بین دندانه‌های درگیر در راستای x قابل صرف نظر است.



شکل «۵»: مدل دینامیکی هشت درجهٔ آزادی سیستم چرخ‌دنده مارپیچ با موتور و بار

$$I_m\ddot{\theta}_m = -C_{s_1}(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_p) - K_{s_1}(\theta_m - \theta_p) + T_m \quad (۵)$$

$$I_l\ddot{\theta}_l = -C_{s_2}(\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_g) - K_{s_2}(\theta_l - \theta_g) - T_l \quad (٦)$$

$$I_p\ddot{\theta}_p = C_{s_1}(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_p) + K_{s_1}(\theta_m - \theta_p) - F_y R_p \quad (۷)$$

$$I_g\ddot{\theta}_g = C_{s_2}(\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_g) + K_{s_2}(\theta_l - \theta_g) + F_y R_g \quad (۸)$$

$$m_p\ddot{y}_p + C_{py}\dot{y}_p + K_{py}y_p = -F_y \quad (۹)$$

$$m_g\ddot{y}_g + C_{gy}\dot{y}_g + K_{gy}y_g = F_y \quad (۱۰)$$

$$m_p\ddot{z}_p + C_{py}\dot{z}_p + K_{py}z_p = -F_z \quad (۱۱)$$

$$m_g\ddot{z}_g + C_{gy}\dot{z}_g + K_{gy}z_g = F_z \quad (۱۲)$$

که در آنها I_m ، I_l ، I_p و I_g به ترتیب ممان اینرسی موتور، بار، پینیون و چرخ‌دنده، m_p و m_g به ترتیب جرم پینیون و چرخ‌دنده، θ_m ، θ_l ، θ_p و θ_g به ترتیب دوران محوری موتور، بار، پینیون و چرخ‌دنده و y_p، y_g، z_p و z_g به ترتیب جابجایی پینیون و چرخ‌دنده در راستای y و z هستند. بالانویس‌های (̇) و (̈) بیانگر مشتقات اول و دوم توابع بر حسب زمان هستند. K_{s_1} ، K_{s_2} ، C_{s_1} و C_{s_2} به ترتیب سفتی و ضریب میرایی محورهای ورودی و خروجی، K_{py} ، K_{gy} ، C_{py} و C_{gy} به ترتیب سفتی و ضریب میرایی یاتاقان‌های پینیون و چرخ‌دنده، T_m و T_l به ترتیب گشتاورهای اعمالی از طرف موتور و بار و R_p و R_g به ترتیب شعاع مبنای پینیون و چرخ‌دنده هستند. F_y و F_z نیز به ترتیب مؤلفه‌های نیروی درگیری جفت چرخ‌دنده در راستای y و z هستند که از معادلات (۱۳–۲۲) قابل محاسبه هستند.

$$F_y = K_{my}(\tilde{y}_p - \tilde{y}_g) + C_{my}(\dot{\tilde{y}}_p - \dot{\tilde{y}}_g) \quad (۱۳)$$

$$F_z = K_{mz}(\tilde{z}_p - \tilde{z}_g) + C_{mz}(\dot{\tilde{z}}_p - \dot{\tilde{z}}_g) \quad (۱٤)$$

$$\tilde{y}_p = y_p + R_p\theta_p \quad (۱۵)$$

$$\tilde{y}_g = y_g + R_g\theta_g \quad (۱٦)$$

$$\tilde{z}_p = z_p + \tilde{y}_p tan\beta \quad (۱۷)$$

$$\tilde{z}_g = z_g - \tilde{y}_p tan\beta \quad (۱۸)$$

$$K_{my} = K_m \cos^2\beta \quad (۱۹)$$

$$C_{my} = C_m \cos^2\beta \quad (۲۰)$$

$$K_{mz} = K_m \sin^2\beta \quad (۲۱)$$

$$C_{mz} = C_m \sin^2\beta \quad (۲۲)$$

که در آنها K_m و C_m به ترتیب سفتی و میرایی درگیری جفت چرخ‌دنده مارپیچ و β زاویهٔ مارپیچ است. میرایی هر عضو بر حسب سفتی و جرم آن به‌صورت $2\xi m\sqrt{\frac{K}{m}}$ محاسبه می‌شود، که در آ ξ ضریب میرایی روانکار مورد استفاده روی عضو مورد نظر است. پس از حل معادلات دیفرانسیلی در یک دور کامل چرخش پینیون و به دست آوردن سیگنال‌های ارتعاشی، خطای انتقال سیستم از معادلهٔ (۲۳) قابل محاسبه است. به میزان اختلاف مکان هندسی نقطه‌ای روی دایره مبنای چرخ‌دنده و خط عمل چرخ‌دنده‌ها در حالت واقعی و مکانی که در حالت تئوری باید باشد. خطای انتقال یک جفت چرخ‌دنده گفته می‌شود:

$$TE = (y_p + R_p\theta_p) - (y_g + R_g\theta_g) \quad (۲۳)$$

مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن

مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن یک روش پیشنهادی برای برجسته نمودن تغییرات محلی یک سیگنال است. این روش توسط نویسندگان پیشنهادشده و قابلیّت آن باید در موارد مختلف مطالعه گردد. در سیگنال حاصل از این روش، اختلاف دامنه سیگنال در محل عیب نسبت به قسمت‌های دیگر افزایش یافته و در بهبود شناسایی عیوب می‌تواند مفید باشد. در این روش تعداد مشخصی از نقاط همسایه هر نقطه مورد نظر در دو طرف آن به‌طور متقارن در یکدیگر ضرب شده و مجموع این حاصل‌ضرب به آن نقطه اختصاص می‌یابد. در واقع عامل افزاینده‌ی اختلاف نواحی سالم و معیوب، از ضرب نمودن مقادیر همسایه حاصل می‌شود که باعث می‌شود کوچک‌ترین تغییراتی در یک

ناحیه از سیگنال به‌صورت تغییرات بزرگ خود را نشان دهد. برای یک سیگنال گسسته $x[n]$ مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SNCS_x[n,d] = \sum_{k=1}^{d} x[n+k]x[n-k] \qquad (٢٤)$$

که d اندازهٔ همسایگی را نشان می‌دهد.

در نظر گرفتن یک همسایگی حول نقطه مورد نظر برای انجام محاسبات در این روش، باعث می‌شود تغییرات جزئی در نقاطی که با نقاط همسایگی خود همخوانی ندارند به‌عنوان خطای اندازه‌گیری در نظر گرفته شده و نادیده گرفته شوند و بالعکس تغییراتی که روی تمام نقاط یک ناحیه به‌واسطه وجود عیب واقعی رخ می‌دهند، به‌عنوان تغییرات مهم تلقی شده و برجسته‌تر گردند.

نتایج

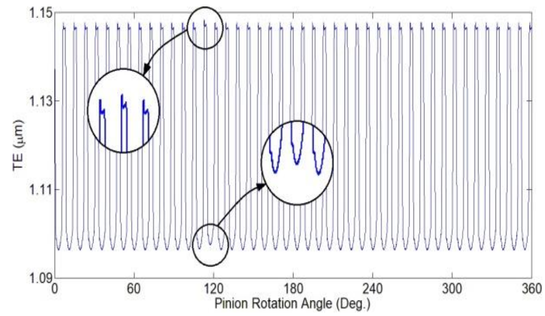
در جدول (٤) مشخصات یک سیستم چرخ‌دنده‌ای مارپیچ تک‌مرحله‌ای مطابق شکل (٥) ارائه شده است. سیگنال ارتعاشی حاصل از شبیه‌سازی دینامیکی این سیستم با وجود یک ترک‌دار با طول و عمق ١٠ درصد طول و ضخامت دندانه، در دندانه شماره ١٤ پینیون، در شکل (٦ –الف) نشان داده شده است.

هرچند به علت کوچک بودن اندازهٔ ترک، اثر آن روی سیگنال ارتعاشی یا همان خطای انتقال سیستم بسیار کم بوده و در شکل به‌راحتی قابل تمایز نیست، اما مقدار خطای انتقال در ناحیه‌ای که دندانهٔ ترک‌دار (دندانه ١٤ام) وارد درگیری شده تا لحظه‌ای که از درگیری خارج می‌شود (حدود زاویهٔ ١٢٠ درجه چرخش پینیون) نسبت به مقادیر متناظر آن در دندانه-های دیگر بیشتر است. در شکل (٦– ب) نیز حاصل مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن با اندازهٔ همسایگی برابر با یک سیکل درگیری نشان داده شده است. چنانکه مشهود است، این عملیات در برجسته کردن اثر ترک و نشان دادن محل وقوع آن کاملاً کارآمد بوده است.

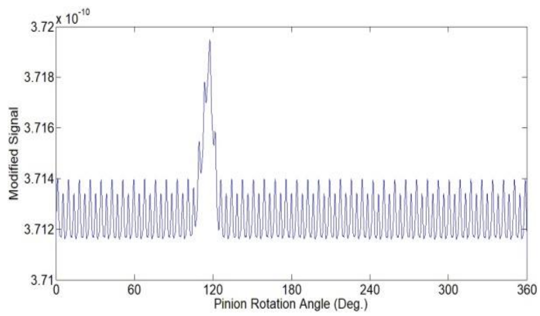
جدول «٤»: مقادیر و مشخصّات سیستم چرخ‌دنده‌ای مارپیچ

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
توان موتور	$3\,KW$	سفتی پیچشی محور ورودی	$160.96\,\frac{kN.m}{rad}$
سرعت دورانی موتور	$1000\,RPM$	سفتی پیچشی محور خروجی	$317.89\,\frac{kN.m}{rad}$
مدول عمودی	$3\,mm$	شعاع داخلی پینیون	$25\,mm$
زاویهٔ فشار عمودی	$20\,deg.$	شعاع داخلی چرخ‌دنده	$30\,mm$
زاویهٔ مارپیچ	$15\,deg.$	مقاومت تسلیم	$276\,MPa$
پهنای چرخ‌دنده	$20\,mm$	مدول الاستیسیته	$68.9\,GPa$
تعداد دندانه پینیون	44	نسبت پواسون	0.33
تعداد دندانه چرخ‌دنده	59	مدول برشی	$26\,GPa$
جرم پینیون	$677\,g$	ممان اینرسی پینیون	$1.774\,g.m^2$
جرم چرخ‌دنده	$1.259\,kg$	ممان اینرسی چرخ‌دنده	$5.808\,g.m^2$
سفتی محوری یاتاقان ورودی	$0.951\,\frac{kN}{mm}$	سفتی شعاعی یاتاقان ورودی	$23.87\,\frac{kN}{mm}$
سفتی محوری یاتاقان خروجی	$2.079\,\frac{kN}{mm}$	سفتی شعاعی یاتاقان خروجی	$46.922\,\frac{kN}{mm}$
جرم محور ورودی	$3.21\,kg$	ممان اینرسی محور ورودی	$0.86\,g.m^2$
جرم محور خروجی	$4.69\,kg$	ممان اینرسی محور خروجی	$1.86\,g.m^2$

در شکل (۷ –الف) سیگنال ارتعاشی یک سیستم چرخ‌دنده‌ای با ۷۱ دندانهٔ پینیون و چهار دندانهٔ ترک‌دار که توسط وانگ و وونگ [7] ارائه شده، نشان داده شده است. چنانکه از شکل الف قابل برداشت است، ناحیه بین زاویهٔ ۲٤۰ تا ۳٤۰ درجه چرخش پینیون دارای اثرات عیوب محلی بوده است؛ اما به علت مخدوش بودن سیگنال، تعیین دقیق دندانه‌های معیوب امکان‌پذیر نیست. در شکل (۷– ب) حاصل مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن با اندازهٔ همسایگی به اندازهٔ یک دندانه نشان داده شده است. چنانکه مشهود است، چهار ناحیه مجزا به‌صورت مشخص و واضح نمایان شده‌اند که می‌تواند در تعیین دندانه‌های معیوب بسیار اثربخش و مفید باشد. می‌توان نتیجه گرفت که این عملیات در برجسته کردن اثر ترک و نشان دادن محل وقوع آن کاملاً کارآمد بوده است.

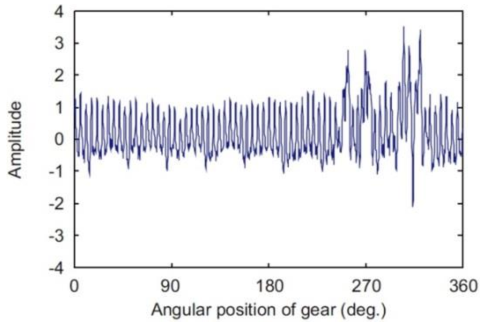


(الف)

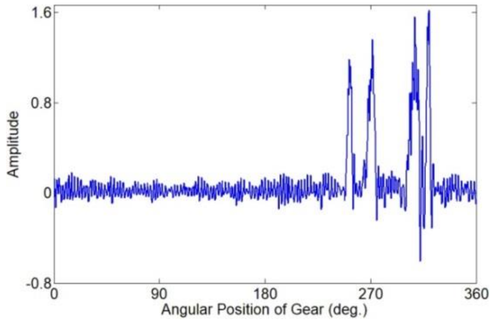


(ب)

شکل «٦»: الف) سیگنال ارتعاشی حاصل از شبیه‌سازی دینامیکی سیستم شکل (۵– ب) حاصل مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن



(الف)



(ب)

شکل «۷»: الف) سیگنال ارتعاشی سیستم چرخ‌دنده‌ای ارائه شده توسط وانگ و وونگ [7]. ب) حاصل مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن

نتیجه‌گیری

کارایی، دقّت و عمر سیستم‌های انتقال قدرت در صنعت بسیار مهم است. ازجمله سیستم‌های انتقال قدرتی که نسبت به دیگر سیستم‌ها دارای نسبت ظرفیت باربری به وزن بالاتر، راندمان انتقال بیشتر، سروصدا و ارتعاش کمتر و عمر بیشتر است، می‌توان به سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای اشاره نمود. در این میان سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای مارپیچ از دقّت، عمر و کاربرد بیشتر و لرزش، سروصدا و خطای انتقال کمتری نسبت به دیگر سیستم‌ها بهره می‌برند. یکی از مواردی که می‌تواند در کارکرد این سیستم‌ها خلل ایجاد کند، وجود ترک در دندانه چرخ‌دنده است که عموماً در ریشهٔ دندانه‌ها اتفاق می‌افتد. ازاین‌رو شناسایی و ردیابی ترک دندانه در زمان پیدایش و رشد اولیه آن، بسیار حائز اهمّیّت است. عموماً در پژوهش‌های مربوطه، برای استخراج اثر ترک‌ها از سیگنال ارتعاشی

و بـرای تعیـین محـل وقـوع آنهـا از روش سـیگنال باقیمانده استفاده می‌کننـد. ازآنجاکـه محاسـبه سـیگنال باقیمانده مستلزم دانستن سیگنال ارتعاشی حالت سـالم و یا پارامترها و شرایط سیستم مورد بررسی است، ارائه راه‌کاری جهت برجسته نمودن تأثیر تـرک دندانـه روی سیگنال ارتعاشی می‌تواند در شناسـایی محـل تـرک در سیگنال ارتعاشی بسیار مفید و مثمـر ثمـر واقـع شـود. بدین منظور از سیگنال ارتعاشی حاصل از شـبیه‌سـازی یک سیستم چرخ‌دنده‌ای مارپیچ تک‌مرحلـه‌ای بـا یـک ترک کوچک در ریشهٔ دندانه پینیون استفاده شد. سـپس روش مجمـوع حاصـل‌ضـرب همسـایه‌هـای متقـارن به‌عنوان روش پیشنهادی در این تحقیـق، روی سـیگنال ارتعاشی سیستم اعمال شده و قابلیّت منحصربه‌فـرد آن نشان داده شد. بدین‌صورت که تغییـرات کـوچکی کـه به‌واسـطه یـک تـرک کوچـک روی سـیگنال ارتعاشـی سیستم رخ داده بود، با اعمال روش پیشنهادی تا حدود سه برابر کل دامنه ارتعاشی افزایش یافت. همچنین ایـن روش روی یک سیگنال ارتعاشی مخدوش ارائه‌شده در یکی از تحقیقات پیشین، اعمـال شـده و کـارایی آن در تعیین دندانه‌های معیوب به‌خوبی نشان داده شد. در این مثال نیز نسبت دامنه ارتعاشی ناحیه معیـوب بـه ناحیـه سالم که کمتر از دو برابر بـود تـا بـیش از چهـار برابـر ارتقاء یافت. به‌طورکلی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که این عملیات در برجسته کردن اثر ترک و نشـان دادن محـل وقوع آن کاملاً مفید و کارآمد عمـل مـی‌کنـد. ازجملـه پژوهش‌هایی کـه در آینـده در ایـن زمینـه قابـل انجـام است، می‌توان به بررسی اثر اندازهٔ همسـایگی بـر روی برجسـته‌سـازی محـل عیـب و همچنـین اعمـال روش پیشـنهادی بـر روی سـیگنال‌هـای ارتعاشـی تجربـی سیستم‌های مختلف چرخ‌دنده‌ای اشاره نمود.

واژه‌نامه

تفکیک دامنه‌ای و فازی	Amplitude and Phase Demodulation
سیگنال باقیمانده	Residual Signal
مدل خودبرگشت‌کننده	Autoregressive Model
تجزیه جمعی تجربی	Ensemble Empirical Mode Decomposition
توابع مود طبیعی	Intrinsic Mode Functions
سفتی درگیری	Mesh Stiffness
چرخدنده مارپیچ	Helical Gear
ترک در ریشه دندانه	Tooth Root Crack
مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن	Sum of Symmetric Neighbors Multiplication
خطای انتقال	Transmission Error

مراجع

1. Mohammed, O.D., Rantatalo, M. and Aidanpää, J.-O., "Improving mesh stiffness calculation of cracked gears for the purpose of vibration-based fault analysis", *Engineering Failure Analysis*, Vol. 34, pp. 235–251, (2013).
2. Li, C.J. and Lee, H., "Gear fatigue crack prognosis using embedded model, gear dynamic model and fracture mechanics", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 19, pp. 836–846, (2005).
3. Wan, Z., Cao, H., Zi, Y., He, W. and Chen, Y., "Mesh stiffness calculation using an accumulated integral potential energy method and dynamic analysis of helical gears", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 92, pp. 447–463, (2015).
4. McFadden, P.D., "Detecting fatigue cracks in gears by amplitude and phase demodulation of the meshing vibration", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 108, pp.

165–170, (1986).
5. Stewart, R.M., "*Some useful data analysis techniques for gearbox diagnostics*", University of Southampton, (1977).
6. Randall, R.B., "*Vibration-based condition monitoring: industrial, aerospace and automotive applications*", John Wiley & Sons, (2011).
7. Wang, W. and Wong, A.K., "Autoregressive model-based gear fault diagnosis", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 124, pp. 172–179, (2002).
8. Endo, H., Randall, R.B., and Gosselin, C., "Differential diagnosis of spall vs. cracks in the gear tooth fillet region: Experimental validation", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 23, pp. 636–651, (2009).
9. Zhou, X., Shao, Y., Lei, Y. and Zuo, M., "Time-varying meshing stiffness calculation and vibration analysis for a 16DOF dynamic model with linear crack growth in a pinion", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 134, pp. 11011, (2012).
10. Assaad, B., Eltabach, M. and Antoni, J., "Vibration based condition monitoring of a multistage epicyclic gearbox in lifting cranes", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 42, pp. 351–367, (2014).
11. Elasha, F., Ruiz-Carcel, C., Mba, D. and Chandra, P., "A comparative study of the effectiveness of adaptive filter algorithms, spectral kurtosis and linear prediction in detection of a naturally degraded bearing in a gearbox", *Journal of Failure Analysis and Prevention*, Vol. 14, pp. 623–636, (2014).
12. Wu, S., Zuo, M.J. and Parey, A., "Simulation of spur gear dynamics and estimation of fault growth", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 317, pp. 608–624, (2008).
13. Sun, R., Yang, Z., Chen, X., Tian, S. and Xie, Y., "Gear fault diagnosis based on the structured sparsity time-frequency analysis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 102, pp. 346-363, (2018).
14. Buzzoni, M., D’Elia, G., Mucchi, E. and Dalpiaz, G., "A vibration-based method for contact pattern assessment in straight bevel gears", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 120, pp. 693-707, (2019).
15. Mahgoun, H., Bekka, R.E. and Felkaoui, A., "Gearbox fault diagnosis using ensemble empirical mode decomposition (EEMD) and residual signal", *Mechanics & Industry*, Vol. 13, pp. 33–44, (2012).
16. Yu, W., Shao, Y. and Mechefske, C.K., "The effects of spur gear tooth spatial crack propagation on gear mesh stiffness", *Engineering Failure Analysis*, Vol. 54, pp. 103–119, (2015).
17. Mohammed, O.D., Rantatalo, M. and Aidanpää, J.-O.,: "Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 54, pp. 293–305, (2015).
18. Mohammed, O.D. and Rantatalo, M., "Gear tooth crack detection using dynamic response analysis", *Insight* (Northampton), Vol. 55, pp. 417–421, (2013).